

Kis Tigris Gimnázium és Szakiskola

Készség szint-mérés és - fejlesztés a matematika kompetencia területén

Vlaj Máté
2011.

Bevezetés

A Második Esély

A Második Esély elnevezés egy olyan oktatási stratégiát takar, melynek egyik legfőbb célja, hogy segítse a középiskolai végzettséggel nem rendelkező, az iskolarendszerből lemorzsolódott vagy azt korábban elhagyó tanköteles, illetve nem tanköteles korú fiatalokat a középfokú végzettség, illetve az érettségi megszerzésében.

A program célkitűzése, hogy olyan új – tanulást támogató, az egyéni tanulási igényekre reagáló – tanulásszervezési eljárások alkalmazását segítse elő, amelyek korábban nem, vagy csak elszórtan voltak jelen a közoktatás középfokú intézményeiben.

A Célcsoport

A Második Esély iskolák elsődleges célcsoportját a közoktatásból kiszorult, vagy annak marginális szférájába sodródott túlnyomórészt roma/cigány fiatalok képezik.

A nappali tagozatos célcsoport részint az általános iskolát frissen befejezett diákokból tevődik össze, részint pedig olyan fiatalokból, akik egynéhány éve már nem tanulnak, esetleg elkezdtek tanulmányokat középfokú iskolákban, de onnan különböző okok miatt már kihullottak. Az iskolánkba járó tanulók kb. 70 %-a hátrányos helyzetű, illetve halmozottan hátrányos helyzetű.

A nappali tagozatos célcsoportra alapvetően jellemző, hogy szinte kivétel nélkül alacsony színvonalú általános iskolai képzést kaptak, s ennek megfelelően nagyfokú ismeret- és készségihiánnyal bírnak. Iskolai létük rendszerint kudarcélménnyel párosul, közvetlen környezetükben nemigen látnak példát arra, hogy a továbbtanulás jelentős szociális helyzetjavulással járjon. Saját tanulási kultúrával nem rendelkeznek, szinte ismeretlen számukra az otthoni, órára való készülés.

Fenti okok miatt ezt a célcsoportot továbbra is fokozottan fenyegeti az iskolából való kimaradás veszélye, és ha ezek a diákok kimaradnak az iskolából, tartós, talán életük végéig tartó munkanélküliségnek néznek elébe.

A célcsoport alapvetően roma/cigány tanulókból tevődik ki, ezért esetenként komoly nyelvi nehézségeik vannak úgy a magyar nyelv, mint a szakterminológia területén. Ezt a tényt sajnos az alapfokú oktatás a legtöbb esetben figyelmen kívül hagyja. Ennek tudható be az a – minden bizonnyal országos szintű jelenség – hogy a roma/cigány diákok legtöbbször a felső tagozat elkezdésekor marad el végelegesen az osztálytársaitól, tanulmányi eredményei ugrásszerűen megromlanak, elkezd egyre többet hiányozni, kimaradozni, s végleg elveszti a fonalat. Semmiképpen sem szabad tehát azonnal a

számukra gyakran érthetetlen és különösen nehéz gimnáziumi tananyagot erőltetni, hanem hosszú és alapos pedagógiai munkával kell pótolni a felső tagozat hiányzó ismereteit.

Második esély Gimnáziumi programunk fő céljai

Az új tanulási formák bevezetésének célja, hogy csökkentse a tanulási kudarcokat és ezáltal a tanulói célcsoport lemorzsolódását, valamint képessé tegye az egyes intézményeket és pedagógusaikat arra, hogy a tanulás világától már eltávolodott tanulókat újból, eredményesen be tudják vonni az oktatásba. Mindezt legfőképp annak érdekében, hogy az érintettek saját tanulási pályára állva sajátítsák el a további életük alakításához nélkülözhetetlen kompetenciákat.

- Cél, hogy a lemorzsolódott vagy a lemorzsolódásnak kitett tanulók körében megerősödjön az érettségihez, ezen keresztül a további életpálya építéshez fűződő ambíció.
- További cél, hogy az új esélyt biztosító keretek között minimálisra csökkenjen a kifejezetten tanulási kudarc miatt újból lemorzsolódók aránya.
- Cél, hogy a Második Esély Gimnáziumi programok újszerű pedagógiai módszereket és, tanulásszervezési eljárásokat alkalmazzanak, például: az egyéni tanulói igényeknek megfelelő előrehaladás biztosítása (mentori foglalkozások), a rugalmas vizsgáztatási rend és a szöveges értékelés alkalmazásának bevezetése;
- kooperatív tanítási technikák, projekt módszer, drámapedagógia, stb. alkalmazása;
- tanulás-módszertani ismeretek átadása, önismereti foglalkozások szervezése és csoportos foglalkozások a közösségfejlesztés érdekében (pszichológusok bevonásával).

A fejlesztési célok és kompetenciák

Megismerés

- Tapasztalatszerzés
- Képzelet
- Emlékezés
- Gondolkodás
- Ismeretek rendszerezése
- Ismerethordozók használata

Ismeretek alkalmazása

- Problémakezelés és – megoldás
- Alkotás és kreativitás

- Kommunikáció
- Együttműködés
- Motiváltság
- Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás

A szakanyag célja:

A szakanyag célja és rendeltetése, hogy olyan feladatanyag típusokat és mintákat gyűjtsön össze, melyek hasznos segédeszközül szolgálhatnak a tanári és mentori munkának, mind egyéni, mind pedig csoportos foglalkozásokon. A feladattár célját nemcsak a használatában éri el, hanem folyamatos bővülésében is. A feladattár a 9. és 10. osztályos matematika tananyagra épül.

- Alapműveletek
- Halmazok
- Algebra és számelmélet
- Függvények
- Gyökvonás
- Másodfokú egyenletek
- Szögfüggvények

1.1. A négy alpművelet - Összeadás

1. Végezd el a műveleteket!

a) $15 + 37$

b) $37 + 15$

c) $15 + 84$

d) $84 + 15$

e) $37 + 84$

f) $84 + 37$

g) $15 + 37 + 84$

h) $84 + 37 + 15$

i) $37 + 15 + 84$

j) $15 + 84 + 37$

k) $84 + 15 + 37$

l) $37 + 84 + 15$

2. Add össze a következő számokat a neked legegyszerűbb sorrendben!

a) $47; 153; 36$

b) $36; 145; 64$

c) $16; 24; 100$

d) $63; 25; 75$

3. Végezd el írásban a következő összeadásokat!

a) $1958 + 2952 + 2700 + 162$

b) $12926 + 57092 + 29981$

c) $107 + 710 + 170 + 701$

d) $11407 + 71892 + 37305$

4. Végezd el a műveleteket!

a) $17 + (-7)$

b) $(-10) + 7$

c) $(-17) + 10$

d) $30 + (-17)$

e) $3 - 17$

f) $(-5) + (-12)$

g) $(-5) + 12$

h) $(-63) + (-36)$

5. Írd be a hiányzó számjegyeket!

a)
$$\begin{array}{r} 7462 \\ + 1915 \\ \hline \dots \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 7462 \\ + \dots \\ \hline 9377 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 1.48 \\ + 27. \\ \hline .9.1 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 5.24 \\ + 38. \\ \hline .6.2 \end{array}$$

1.2. A négy alpművelet - Kivonás

1. Végezd el a következő műveleteket!

a) $562 - 176$

b) $462 - 76$

c) $392 - 6$

d) $4651 - 2758$

e) $2651 - 785$

f) $2051 - 185$

g) $1951 - 85$

h) $1901 - 35$

i) $17645 - 8265$

j) $98716 - 89617$

2. Írd be a hiányzó számjegyeket!

a)
$$\begin{array}{r} 9377 \\ - 7462 \\ \hline \dots \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 9377 \\ - \dots \\ \hline 7462 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 7.31 \\ - 54. \\ \hline .9.1 \end{array}$$

3. Végezd el a következő műveleteket!

a) $43 + (-68)$

b) $(-68) + 43$

c) $(-25) - (-68)$

d) $(-25) - 43$

e) $(-43) + (-68)$

f) $(-68) + (-43)$

g) $(-111) - (-68)$

h) $(-111) - (-43)$

1.3. A négy alpművelet - Szorzás

1. Végezd el írásban a következő műveleteket!

a) $285 \cdot 852$

b) $111 \cdot 874$

c) $27 \cdot 37$

d) $222 \cdot 124$

e) $125 \cdot 64$

f) $854 \cdot 2050$

2. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(6 + 7) \cdot 4$

b) $6 + 7 \cdot 4$

c) $6 \cdot 7 + 4$

d) $6 \cdot 4 + 7 \cdot 4$

e) $(10 - 7) \cdot 8$

f) $10 - 7 \cdot 8$

g) $10 \cdot 8 - 7 \cdot 8$

h) $10 \cdot 8 - 7$

3. *Hány számjegyű lehet a hiányzó szorzó?*

a) $567 \cdot \dots = 5670$

b) $42 \cdot \dots = 4200$

c) $123 \cdot \dots = 3690$

d) $593 \cdot \dots = 4151$

e) $926 \cdot \dots = 8340$

f) $906 \cdot \dots = 9966$

4. *Melyik számjegy állhat a hiányzó szorzó első helyiértékén?*

a) $486 \cdot \dots = 102546$

b) $745 \cdot \dots = 603450$

c) $97 \cdot \dots = 80122$

d) $108 \cdot \dots = 64044$

5. *Végezd el a műveleteket!*

a) $8 \cdot (-15)$

b) $(-13) \cdot 6$

c) $45 \cdot (-20)$

d) $(-75) \cdot 20$

e) $128 \cdot (-5)$

f) $(-278) \cdot 52$

1.4. A négy alpművelet - Osztás

1. *Végezd el a következő osztásokat!*

a) $5420 : 10$

b) $840 : 20$

c) $6360 : 30$

d) $5450 : 50$

e) $1960 : 40$

f) $180 : 60$

2. *Végezd el a következő osztásokat!*

a) $1944 : 9$

b) $6140 : 5$

c) $2976 : 4$

d) $9627 : 3$

e) $6381 : 9$

f) $8640 : 8$

g) $512 : 32$

h) $1296 : 48$

3. Írj zárójeleket a következő kifejezésekbe, hogy ne változzon az eredményük! Végezd el a műveleteket!

a) $128 : 16 + 167 - 28 \cdot 3 : 4$

b) $864 : 4 : 3 : 6 : 6$

c) $1286 - 83 - 14 - 60 + 21$

d) $45 \cdot 4000 : 18 - 18 \cdot 5 \cdot 36$

4. Keresd meg, mely zárójeleket lehet elhagyni a kifejezésekből, hogy ne változzon az értékük! Végezd el a műveleteket!

a) $(1400 : 7) \cdot 3 : 6 - (25 + 4) - 2$

b) $571 - (16 : 2) \cdot 5 + 5 - (41 \cdot 2)$

c) $[(156 - 52) \cdot 3 : 4] - 10 \cdot (4 + 3)$

d) $2000 : (200 : 5) + 41 \cdot (8 - 6)$

6. Végezd el a következő maradékos osztásokat!

a) $8000 : 134$

b) $125052 : 216$

c) $3646 : 37$

d) $36397 : 825$

e) $7893 : 45$

f) $12967 : 513$

g) $8615902 : 7003$

h) $578915 : 500$

7. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(-200) : 5$

b) $(-200) : 20$

c) $(-360) : 9$

d) $(-360) : 72$

e) $(-1260) : 18$

f) $(-1260) : 70$

2. Műveletek törtekkel

1. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$

d) $\frac{4}{7} + \frac{5}{7}$

e) $\frac{4}{2} - \frac{2}{2}$

f) $\frac{7}{3} - \frac{4}{3}$

g) $\frac{12}{4} - \frac{8}{4}$

h) $\frac{18}{7} - \frac{4}{7}$

i) $3 + \frac{2}{3}$

j) $\frac{2}{5} + 2$

k) $5 + \frac{3}{4}$

l) $\frac{24}{8} + 1$

m) $3 - \frac{2}{3}$

n) $\frac{10}{5} - 2$

o) $5 - \frac{10}{4}$

p) $\frac{24}{8} - 3$

q) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$

r) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

s) $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$

t) $\frac{4}{12} + \frac{1}{3}$

u) $\frac{2}{5} - \frac{3}{4}$

v) $\frac{3}{6} - \frac{1}{5}$

w) $\frac{4}{13} - \frac{1}{2}$

x) $\frac{4}{3} - \frac{1}{24}$

2. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$

d) $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{7}$

e) $\frac{4}{2} : \frac{2}{2}$

f) $\frac{8}{6} : \frac{8}{3}$

g) $\frac{6}{3} : \frac{2}{4}$

h) $\frac{4}{7} : \frac{8}{14}$

i) $3 \cdot \frac{4}{3}$

j) $\frac{8}{5} \cdot 2$

k) $5 \cdot \frac{3}{4}$

l) $\frac{12}{8} \cdot 2$

m) $3 : \frac{2}{3}$

n) $\frac{10}{5} : 2$

o) $5 : \frac{10}{4}$

p) $\frac{24}{8} : 3$

3. Pótold a következő szorzásokból a hiányzó számokat! Ha lehet egyszerűsítsd!

a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{-}{6} = \frac{15}{42}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{-} = \frac{12}{40}$

c) $\frac{5}{7} \cdot \frac{-}{10} = \frac{15}{70}$

d) $\frac{9}{4} \cdot \frac{11}{-} = \frac{99}{28}$

e) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{-} = \frac{35}{32}$

f) $\frac{3}{8} \cdot \frac{-}{4} = \frac{9}{16}$

g) $\frac{5}{7} \cdot \frac{-}{10} = \frac{3}{14}$

h) $\frac{7}{4} \cdot \frac{-}{5} = \frac{21}{5}$

i) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{-} = \frac{10}{24}$

j) $\frac{4}{9} \cdot \frac{-}{7} = \frac{40}{105}$

k) $\frac{3}{7} \cdot \frac{-}{-} = \frac{15}{14}$

l) $\frac{5}{6} \cdot \frac{-}{-} = \frac{1}{4}$

4. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{5}{2 \cdot 3} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{5}{16}$

c) $\frac{6 \cdot 2 + 7}{6} - \frac{5}{3}$

d) $\frac{3+2}{6-1} - \frac{12+1}{12-2} + \frac{2}{30-5}$

$$e) \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 4} : \frac{16 - 4 \cdot 2}{3 \cdot 3 + 1}$$

$$f) \frac{3 + 4 \cdot 2}{45 - 19} : \frac{3 \cdot 7}{2}$$

5. Töltsd ki a szorzótáblát! Ahol csak lehet, egyszerűítsd az eredményt!

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{2}{3}$				
$\frac{5}{7}$				
$\frac{3}{4}$				
$\frac{4}{9}$				

:	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{21}{8}$
$\frac{3}{5}$				
$\frac{11}{7}$				
$\frac{17}{3}$				
$\frac{21}{8}$				

3.1. Halmazok

1. *Halmazt alkotnak-e a következő kifejezések? Igen válasz esetén írd példát, nem válasz esetén alakítsd át a mondatot úgy, hogy az igaz legyen!*

- a) Petőfi Sándor szép versei
- b) A 6-tal osztható számok
- c) Az alacsony emberek
- d) Somogy megye szép általános iskolái
- e) A könnyű matematika feladatok
- f) A nagy termetű állatok

2. *Legyen a $H = \{\text{együttesek}\}$ alaphalmaz alábbi részhalmazai*

$A = \{\text{rockzenekarok}\}$

$B = \{\text{női énekessel rendelkező együttesek}\}$

$C = \{\text{legalább 3 gitárossal fellépő zenekarok}\}$

milyen együttesek tartoznak az alábbi halmazművelettel megadott részhalmazokba?

- a) $A \cap B$
- b) $A \setminus \bar{C}$
- c) $\bar{C} \cup \bar{B}$

3. *Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ és a $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ halmaz.*

- a) Adjuk meg elemeik felsorolásával az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!
- b) Ábrázoljuk a számokat Venn-diagramon!

4. *Adott az $A = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ és a $B = \{5; 7; 9; 11; 13\}$ halmaz.*

- a) Adjuk meg elemeik felsorolásával az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!
- b) Ábrázoljuk a számokat Venn-diagramon!

5. *Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $A = \{2; 4; 6; 7\}$ és $B = \{1; 3; 5; 6; 7\}$. Adjuk meg a következő halmazokat, és ábrázoljuk Venn-diagramon!*

- a) $A \cup B$;
- b) $A \cap B$;
- c) \bar{A} ;
- d) $A \cap \bar{B}$;
- e) $A \setminus B$.

6. Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha tudjuk, hogy:

$$A \cup B = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\},$$

$$A \setminus B = \{8; 9; 10\},$$

$$A \cap B = \{5\}.$$

7. Adott három halmaz: $A = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$, $B = \{a; c; d; f; i; j; k; l; m\}$, $C = \{o; n; m; i; h; g; e; c; a\}$.

a) Adjuk meg elemeik felsorolásával az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!

b) Ábrázoljuk a számokat Venn-diagrammon!

8. Adott három halmaz: $A = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$, $B = \{a; c; d; f; i; j; k; l; m\}$, $C = \{o; n; m; i; h; g; e; c; a\}$.

a. Határozzuk meg az $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \cap C$, és $A \cup B$ halmazokat.

b. Határozzuk meg az $A \setminus (B \cup C)$ halmazt.

c. Ábrázoljuk az A , B , C halmazokat Venn-diagrammal.

9. Egy 30 fős osztályban tizenötten tanulnak zongorázni, hatan hegedülni, ketten pedig zongorázni és hegedülni is. Hányan vannak az osztályban, akik se zongorázni, se hegedülni nem tanulnak? Ábrázoljuk Venn-diagrammal is! Ábrázold Venn-diagrammon és használd a logikai szitát is!

10. Egy osztályba 70 tanuló jár. Közülük 28-an énekelnek, 26-an gitározni, 28-an pedig hegedülni tanulnak. 12-en vannak azok, akik énekelnek és gitározni is, 11-en hegedülnek és gitározni is tanulnak, valamint 13 olyan diák van, aki énekel és hegedül. Egyetlen olyan tanulója van az osztálynak, aki énekel is, gitározik is és hegedülni is tud. Hányan vannak azok akikre egyik sem jellemző? Ábrázold Venn-diagrammon és használd a logikai szitát is!

3.2. Intervallumok

1. Adjuk meg a következő intervallumok metszetét és ábrázoljuk számegyenesen!

a) $] -5; 1[\cup] 1; 6[$

b) $] -4; 3[\cap] 0; 4[$

c) $] -4; 2[\cap] 2; 7[$

d) $] -5; 1[\cap] -1; 4[$

e) $] -5; 3[\cap] -1; 6[\cap] -7; 4[$

e) $] -4; 4[\cap] -1; 5[\cap] -8; 2[$

4.1. A hatványozás azonosságai

A hatványozás azonosságai

- I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- III. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- V. $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$

Hatványozás egész kitevőre

- I. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- II. $a^0 = 1$

4.2. Feladatok:

1. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

- a) $a \cdot a^2$
- b) $a^{-1} \cdot a^2 \cdot a^0$
- c) $\frac{a^4 \cdot a^2}{a^3}$
- d) $\frac{(a^4)^3}{a^7}$
- e) $(a^7)^3 \cdot (a^4)^5$
- f) $\frac{(a^2)^3 \cdot a}{a^2 \cdot a^3}$
- g) $(a^2 \cdot b)^3$
- h) $a^2 \cdot b^2 \cdot a^5 \cdot b^{-1}$
- i) $\frac{(a^3 \cdot b)^3 \cdot b^5}{(b^2)^3 \cdot a^8}$
- j) $\frac{(a^3 \cdot b)^4 \cdot (a^2)^3}{b \cdot (a^3 \cdot b)^3}$
- k) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b^3}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^5}{b}\right)^2$
- l) $\left(\frac{2x}{y}\right)^3 \cdot \left(\frac{xy^2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^4$

$$m) \frac{(x^2 y^3)^5 \cdot (xy^2)^3}{(x^2)^2 \cdot (yx^2)^4 \cdot y^{15}}$$

$$n) \frac{(a^3 b)^4 \cdot b^3}{(ab^2)^5 \cdot a^2} : \frac{(a^5)^2 b}{(a^4 \cdot b^3)^2}$$

2. Számítsuk ki a következő kifejezések értékeit!

$$a) (2^3 \cdot 5)^3$$

$$b) \frac{(7^3)^5}{7^{12}}$$

$$c) \frac{(2^2 \cdot 5)^6 \cdot 2^3}{(5^2 \cdot 2^3)^3}$$

$$d) \frac{(2^4 \cdot 5)^6 \cdot 2^3}{(5^2 \cdot 2^3)^3} \cdot \frac{(2 \cdot 5^3)^4}{(2^2 \cdot 5)^{12}}$$

$$e) \frac{(3 \cdot 7^3)^4}{3^6} \cdot \frac{9^5 \cdot 3^8}{49^6}$$

$$f) \left(\frac{16}{27}\right)^3 \cdot \frac{(3^4 \cdot 2)^5}{(3^3)^4 \cdot (2^5)^3}$$

3. Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb!

$$a) 5^{12} \text{ vagy } (5^5)^2$$

$$b) 2^4 \cdot 2^5 \text{ vagy } (2^4)^2$$

$$c) 2^4 \cdot 2^5 \text{ vagy } (2^4)^2$$

$$d) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \text{ vagy } \frac{16}{3^4}$$

$$e) (3^2)^3 \text{ vagy } (3^3 \cdot 3^2)^2$$

$$f) 15^9 \text{ vagy } 9^{15}$$

$$g) 27^7 \text{ vagy } 81^5$$

$$h) 40^{100} \text{ vagy } 100^{50}$$

4. Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki a következő kifejezések értékeit!

$$a) \frac{27 \cdot 16}{6^3}$$

$$b) \frac{12^5}{9^2 \cdot 4^4}$$

$$c) \frac{16^3 \cdot 4^2 \cdot 8^2}{32^4}$$

$$d) \frac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{24^4 \cdot 36^3}$$

$$e) \frac{6^9 \cdot 10^6}{9^9 \cdot 200^3 \cdot 32^3}$$

$$f) \frac{32^3 \cdot 625^2}{128^4} \cdot \frac{64^5}{25^6}$$

5. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$a) (2x)^{-3}$$

$$b) -\left(-\frac{a}{b}\right)^{-2}$$

$$c) (a^3)^{-2} \cdot (a^{-2})^{-4} \cdot (a^{-1})^{-1}$$

$$d) (x^{-2})^{-4} \cdot [(x^3)^{-3}]^{-2} \cdot (x^2)^{-8}$$

e) $(2a^{-3})^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot a^{-4}$

f) $(a^2b^{-3})^{-2} \cdot b^{-5}$

g) $(a^{-1} \cdot b^{-3})^{-2} \cdot (a^{-4} \cdot b^{-2})^{-1}$

h) $(2ab^2)^{-2} \cdot (b \cdot a^{-3})^{-4}$

i) $\frac{(c^{-3})^{-1} \cdot c^{-4} \cdot c^{-1}}{c^{-2} \cdot (c^{-3})^2 \cdot c}$

j) $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{b^{-4}}{a^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^{-1}}{a^4}\right)^{-5}$

6. Számítsuk ki a következő kifejezések értékeit!

a) 3^{-4}

b) $(-5)^{-3}$

c) $(2^{-1})^{-3}$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

e) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

g) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^2$

h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3$

i) $\frac{(5^{-2})^{-3} \cdot (5^3)^{-5}}{(5^2)^3 \cdot (5^{-7})^2}$

j) $\frac{(7^{-5})^2 \cdot (7^{-3})^{-4}}{(7^{-6})^{-2} \cdot 7^{-11}}$

7. Döntsük el, melyik szám a nagyobb!

a) 6^{-3} vagy 3^{-6}

b) 8^{-4} vagy 4^{-8}

c) 10^{-20} vagy 20^{-10}

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ vagy $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$

e) $5^{-3} \cdot 7^2$ vagy $\left(\frac{7}{5}\right)^3$

f) $(2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3})$ vagy 1,6

8. Pótold a (betűkkel jelölt) hiányzó számokat úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!

a) $\frac{(-2)^{-5} \cdot (-2)^6}{(-2)^a} = ((-2)^2)^3$

b) $6^8 \cdot 3^8 = 2^8 \cdot b^8$

c) $\frac{9^6}{3^6} = \frac{21^6}{(c^{-2})^{-3}}$

5.1. Nevezetes szorzatok

A nevezetes szorzatok:

$$\text{VI. } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{VII. } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{VIII. } (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

5.2. Feladatok:

1. Végezzük el a következő négyzetre emeléseket!

$$\text{a) } (x + y)^2 =$$

$$\text{b) } (p - q)^2 =$$

$$\text{c) } (a + 3)^2 =$$

$$\text{d) } (x - 2)^2 =$$

$$\text{e) } (w + 3)^2 =$$

$$\text{e) } (y - 3)^2 =$$

$$\text{f) } (2a + 3)^2 =$$

$$\text{g) } (2b - 4)^2 =$$

$$\text{h) } (2x + 1)^2 =$$

$$\text{i) } (3 - 2b)^2 =$$

$$\text{j) } (3a - b)^2 =$$

$$\text{k) } (2x + y)^2 =$$

$$\text{l) } (3y + x)^2 =$$

$$\text{m) } (3x - 2y)^2 =$$

$$\text{n) } (2x - 4y)^2 =$$

$$\text{o) } (2x + 3y)^2 =$$

$$\text{p) } (5a + 3b)^2 =$$

$$\text{q) } (3a - 3b)^2 =$$

$$\text{r) } (a^2 + 1)^2 =$$

$$\text{s) } (a^2 - 3)^2 =$$

$$\text{t) } (x^3 + 1)^2 =$$

$$\text{u) } (1 - b^3)^2 =$$

$$\text{v) } (a^3 - b^2)^2 =$$

$$\text{w) } (x^4 + y^3)^2 =$$

$$\text{x) } (2a^2 + 3b^3)^2 =$$

$$\text{y) } (4p^3 - 3q^4)^2 =$$

2. Végezzük el a következő négyzetre emeléseket!

$$\text{a) } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$\text{b) } \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 =$$

$$\text{c) } \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$\text{d) } \left(b + \frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$\text{e) } \left(\frac{4}{3} + a\right)^2 =$$

$$\text{f) } \left(\frac{5}{3} - b\right)^2 =$$

$$\text{g) } \left(x - \frac{y}{3}\right)^2 =$$

$$\text{h) } \left(\frac{5}{a} + b\right)^2 =$$

$$\text{i) } \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^2 =$$

$$\text{j) } \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4}\right)^2 =$$

$$\text{k) } \left(\frac{2a}{3} - 3b\right)^2 =$$

$$\text{l) } \left(\frac{5x}{3} + 4y\right)^2 =$$

$$\text{m) } \left(2a + \frac{5b}{2}\right)^2 =$$

$$\text{n) } \left(3x - \frac{4y}{3}\right)^2 =$$

$$\text{o) } \left(\frac{5}{3}a + 2b\right)^2 =$$

$$\text{p) } \left(\frac{4}{3}x - 3y\right)^2 =$$

$$\text{q) } \left(3a + \frac{4}{7}b\right)^2 =$$

$$\text{p) } \left(4x - \frac{3}{4}y\right)^2 =$$

3. Végezzük el a következő négyzetre emeléseket!

$$\text{a) } \left(\frac{2}{10}a^2 + 5b^2\right)^2 =$$

$$\text{b) } \left(\frac{3}{7}x^2 - 4y^2\right)^2 =$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{7}a^2 + \frac{5}{2}b^2\right)^2 =$$

$$\text{d) } \left(\frac{2}{6}x^2 - \frac{1}{4}y^2\right)^2 =$$

$$\text{e) } \left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}b^3\right)^2 =$$

$$\text{f) } \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{6}{10}y^4\right)^2 =$$

$$\text{g) } \left(\frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{2}b^3\right)^2 =$$

$$\text{h) } \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^4\right)^2 =$$

4. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(7x - 6)(7x + 6)$

b) $(3a + 5b)(3a - 5b)$

c) $\left(\frac{1}{5}x - 7\right)\left(\frac{1}{5}x + 7\right)$

d) $(x^2 - 6a)(x^2 + 6a)$

e) $\left(\frac{2}{10}a^3 - 9b^2\right)\left(\frac{2}{10}a^3 + 9b^2\right)$

f) $(8x^2y - 3xy^2)(8x^2y + 3xy^2)$

5. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(3a - 1)^2 - (2a + 3) \cdot (2a - 3) =$

b) $(4x + 5)^2 + (2x + 2) \cdot (2x - 2) =$

c) $(3a + 3)^2 + (4a + 4) \cdot (4a - 4) - (2a + 3)^2 =$

d) $(3x + 2)^2 - (4x + 3) \cdot (4x - 3) + (x - 7)^2 =$

e) $(4x + y)(4x - y) + (2x - y)^2 - (5x + 2y)(5x - 2y) =$

6.1. Oszthatóság

Oszthatósági szabályok:

Egy szám 2-vel, 5-tel, illetve 10-zel való osztási maradéka megegyezik az utolsó számjegyének 2-vel, 5-tel, illetve 10-zel való osztási maradékával.

Egy szám 4-gyel, 20-szal, 25-tel, 50-nel, illetve 100-zal való osztási maradéka megegyezik az utolsó két számjegyéből képzett szám 4-gyel, 20-szal, 25-tel, 50-nel, illetve 100-zal való osztási maradékával.

Egy szám 8-cal, 125-tel, 200-zal, 250-nel, 500-zal, illetve 1000-rel való osztási maradéka megegyezik az utolsó három számjegyéből képzett szám 8-cal, 125-tel, 200-zal, 250-nel, 500-zal, illetve 1000-rel való osztási maradékával.

Egy szám 3-mal, illetve 9-cel való osztási maradéka megegyezik a számjegyei összegének 3-mal, illetve 9-cel való osztási maradékával.

6.2. Feladatok

1. *Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e, vagy hamisak!*

- a) A 4 osztója a 92-nek.
- b) A 106 többszöröse a 3-nak.
- c) A 0 minden természetes számmal osztható.
- d) a 13 osztója a 95-nek.
- e) a 16 nem osztója a 72-nek
- f) Ha egy szám osztható 2-vel és 5-tel, akkor osztható 10-zel is.
- g) Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel is.
- h) Ha egy szám osztható 2-vel és 6-tal, akkor osztható 12-vel is.
- i) Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 2-vel és 6-tal is
- j) Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel, akkor osztható 12-vel is.
- k) Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 3-mal és 4-gyel is.
- l) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor a kétszerese is osztható 3-mal.
- m) Ha egy szám nem osztható 3-mal, akkor annak kétszerese sem osztható 3-mal.
- n) Ha két szám osztható 3-mal, akkor az összegük is osztható 3-mal.
- o) Ha két szám nem osztható 3-mal, akkor az összegük sem osztható 3-mal.

- p) Ha két szám osztható 3-mal, akkor a szorzatuk is osztható 3-mal.
q) két szám nem osztható 3-mal, akkor a szorzatuk sem osztható 3-mal.

2. *Keresd meg az alábbi számok közös osztóját!*

a) 6; 9; 16; 28; 36; 43

b) 5; 8; 18; 25; 39; 42

3. *Mely n egész szám esetén lesz az alábbi törtek értéke egész szám?*

a) $\frac{10}{n}$

b) $\frac{3}{n-5}$

c) $\frac{n+6}{n}$

d) $\frac{3n+12}{n+4}$

4. *Add meg a hiányzó számjegyeket úgy, hogy a szám osztható legyen a megadott számmal!*

5; 4; 8; 9; 6

a) 163...

b) 30...0

5. *Milyen számjegy kerülhet a betűk helyére, ha:*

- a) a 100 osztója az $1352xy$ számnak
b) a 6 osztója az $135x2$ számnak
c) a 24 osztója az $14x52y$ számnak
d) 45 osztója az $135x2y$ számnak

6. *Milyen számjegy kerülhet a betűk helyére, ha:*

- a) az $1678a$ számról tudjuk, hogy 5-tel osztva 3-at ad maradékul
b) a $231b5$ számról tudjuk, hogy 4-gyel osztva 1-et ad maradékul
c) a $3c561$ számról tudjuk, hogy 9-cel osztva 5-öt ad maradékul

7. *Készíts halmazábrát az alábbi címkék felhasználásával! Írj 2-2 számot a halmazábra minden részébe!*

- a) $A = \{4\text{-gyel osztható számok}\}$ és $B = \{5\text{-tel osztható számok}\}$
b) $A = \{3\text{-mal osztható számok}\}$ és $B = \{9\text{-cel osztható számok}\}$

c) $A = \{2\text{-vel osztható számok}\}$, $B = \{3\text{-mal osztható számok}\}$ és $C = \{5\text{-tel osztható számok}\}$

d) $A = \{2 \text{ többszörösei}\}$, $B = \{4 \text{ többszörösei}\}$ és $C = \{6 \text{ többszörösei}\}$

8. Számítsuk ki a következőket!

a) $(420;560)$

b) $[600;720]$

c) $(972;648)$

d) $[392;448]$

e) $(2205;14175)$

f) $[800;3400]$

g) $(1584;9504)$

h) $[43875;7300]$

7.1. Lineáris függvények

1. Ábrázoljuk a következő valós számokon értelmezett függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben!

a) $x \mapsto 2x - 1$

b) $x \mapsto -2x + 3$

c) $x \mapsto 3x - 6$

d) $x \mapsto 4x - 2$

e) $x \mapsto -5x + 7$

f) $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$

g) $x \mapsto \frac{1}{3}x - 1$

h) $x \mapsto \frac{2}{5}x$

i) $-\frac{3}{2}x + 6$

j) $-\frac{2}{5}x + 4$

k) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x - 4) + 1$

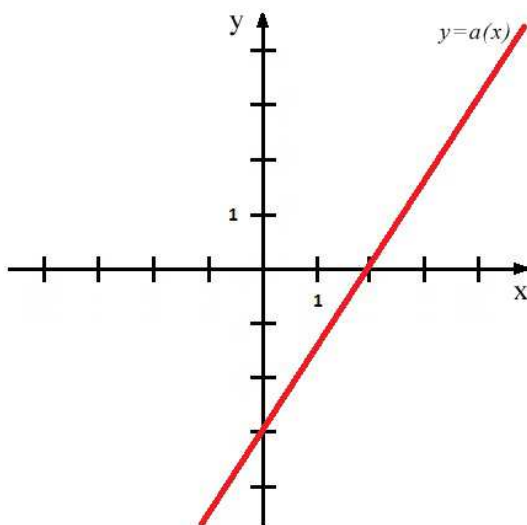
l) $x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot (x - 6) + 2$

m) $x \mapsto 2 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x + 1)$

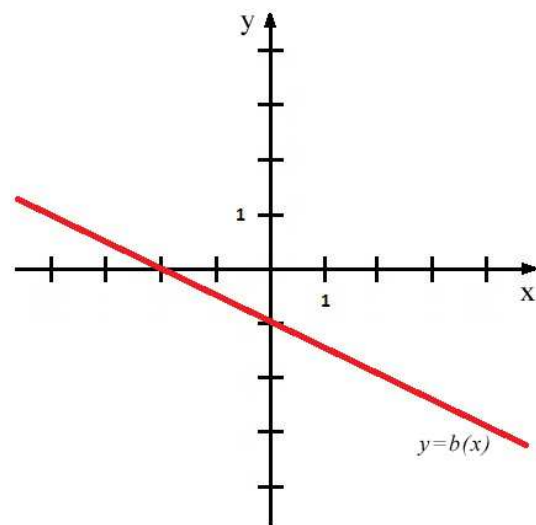
n) $x \mapsto 4x - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$

2. Az alábbi ábrákon lineáris függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát!

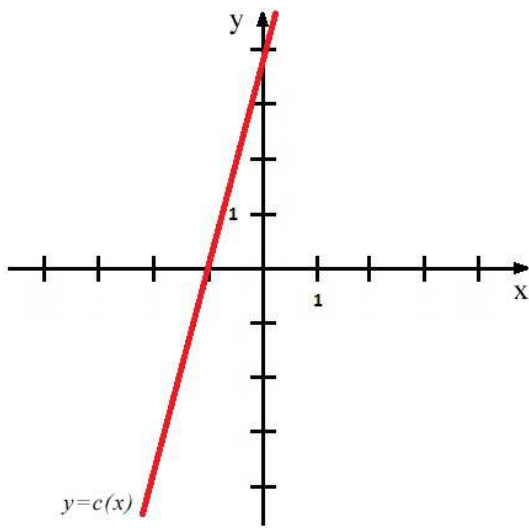
a)



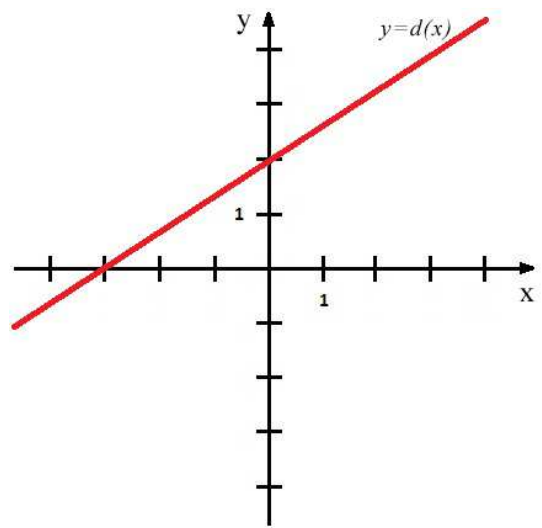
b)



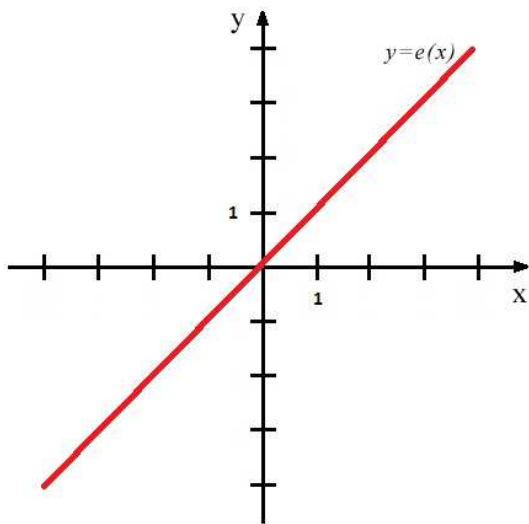
c)



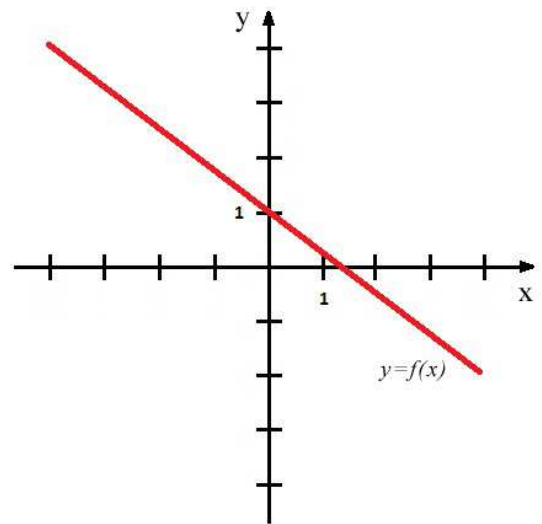
d)



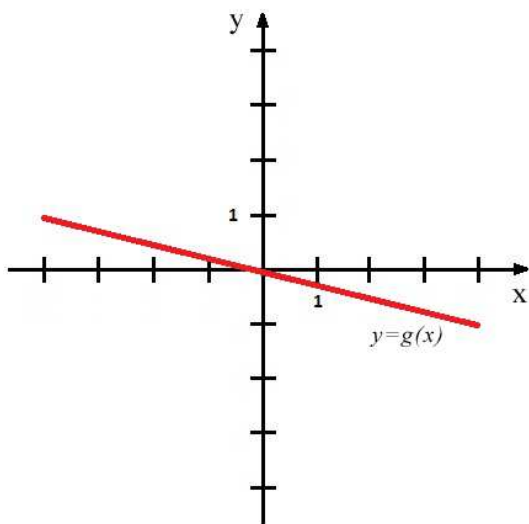
e)



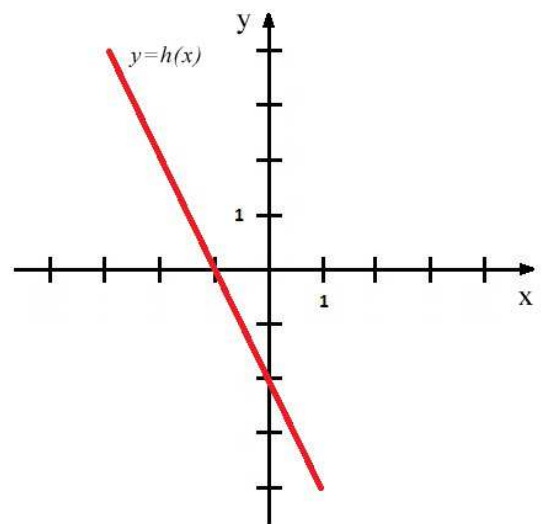
f)



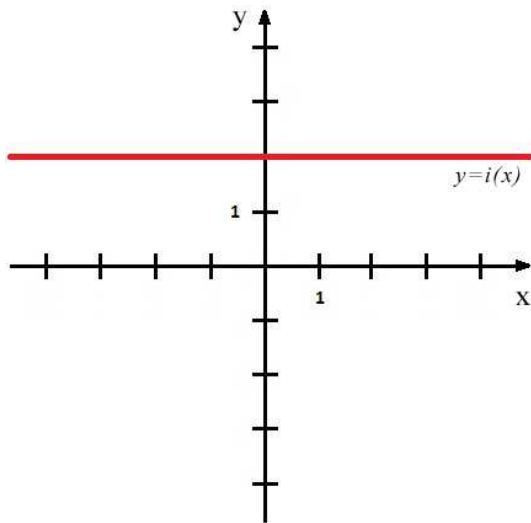
g)



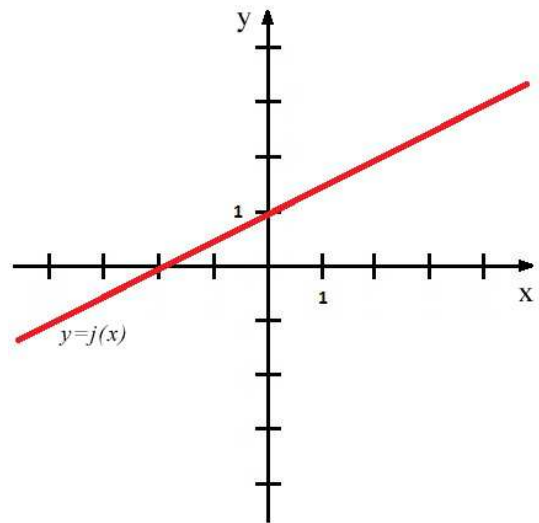
h)



i)



j)



3. Oldd meg grafikusan! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $x + 3 = -1$

b) $2x - 1 = 3$

c) $-\frac{4}{3}x + 1 = -1$

d) $\frac{1}{3}x + 2 = -x + 4$

e) $0,5x - 1 = 3 + 0,5x$

f) $\frac{4}{3}x + 1 = -\frac{1}{3}x + 6$

g) $-\frac{1}{4}x + 5 = -\frac{3}{2}x$

h) $-\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x - 4$

i) $2x - 1 = 2x + 3$

j) $-\frac{7}{4}x - 2 = \frac{5}{2}x - 8$

4. Döntsük el, hogy az adott pontok közül melyik illeszkedik a megadott egyenesekre:

$$P(0; -1), \quad Q(1; 1), \quad R(2; 5)$$

Az adott egyenesek a következő függvények képei:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $g(x) = 2x - 1$

c) $h(x) = 2x + 1$

7.2. Az abszolútérték-függvény

1. Ábrázoljuk a következő valós számokon értelmezett függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben!

a) $x \mapsto |x|$

b) $x \mapsto |x| + 1$

c) $x \mapsto |x| - 3$

d) $x \mapsto |x - 2|$

e) $x \mapsto |x + 4|$

f) $x \mapsto -|x|$

g) $x \mapsto -|x| + 1$

h) $x \mapsto -|x - 1|$

i) $x \mapsto |x + 1| - 2$

j) $x \mapsto |x - 2| + 2$

k) $x \mapsto |x - 4| - 3$

l) $x \mapsto 2 \cdot |x|$

m) $x \mapsto 2 \cdot |x - 1|$

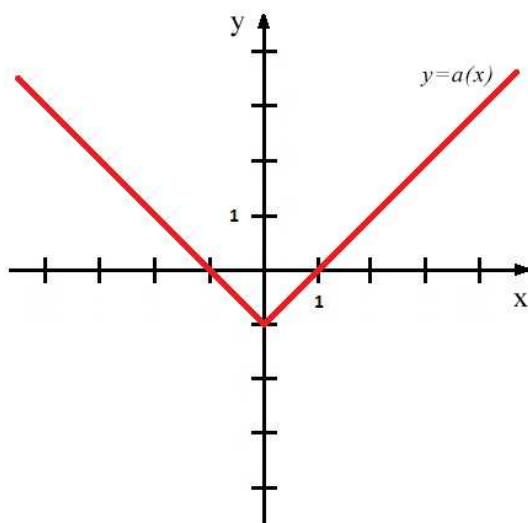
n) $x \mapsto |2x - 3|$

o) $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot |x - 2| + 3$

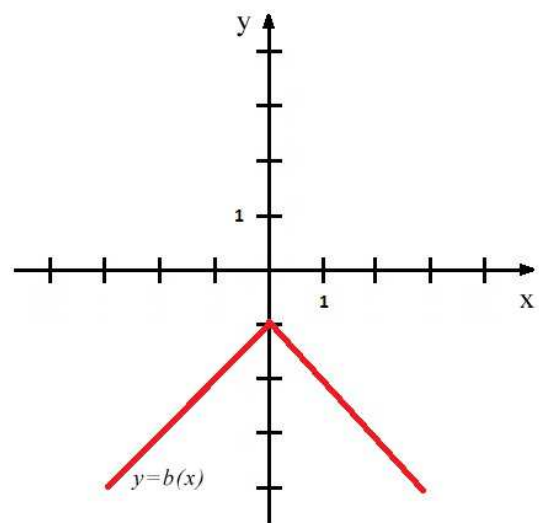
p) $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot |x + 2| + 2$

2. Az ábrákon abszolútérték-függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát!

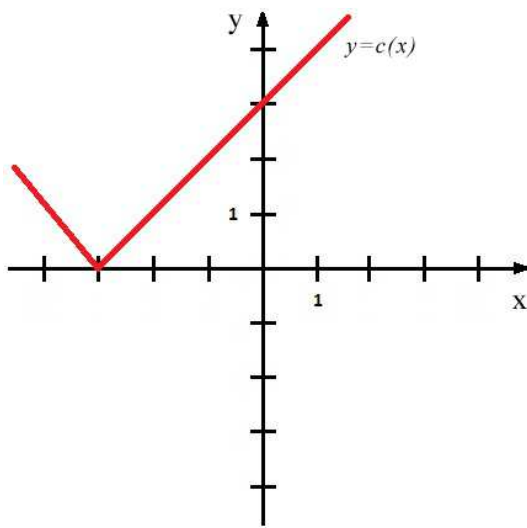
a)



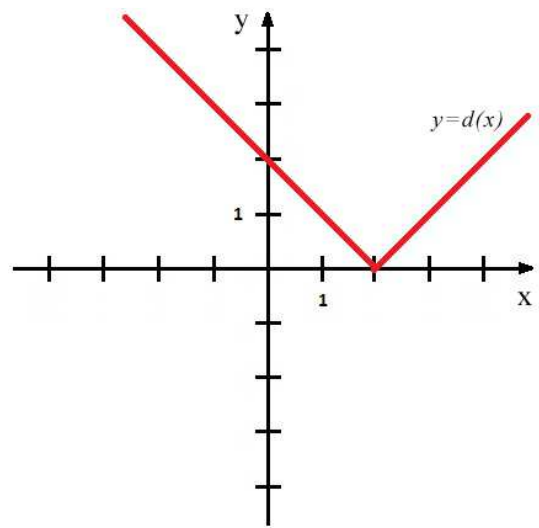
b)



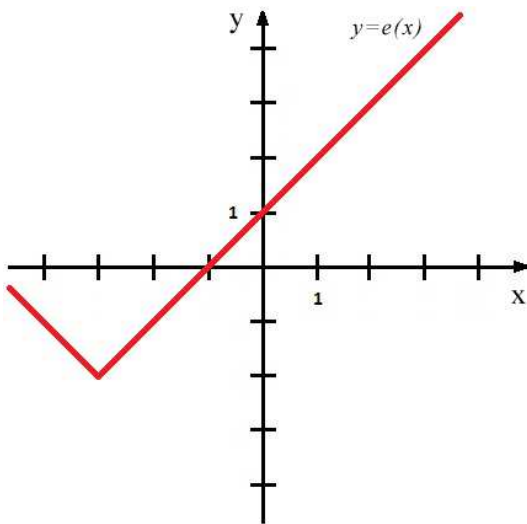
c)



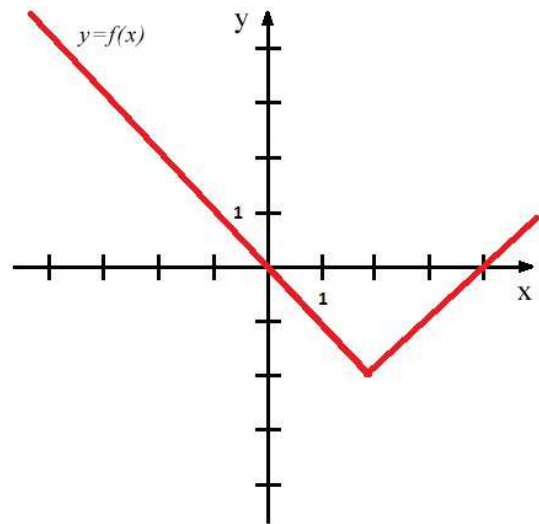
d)



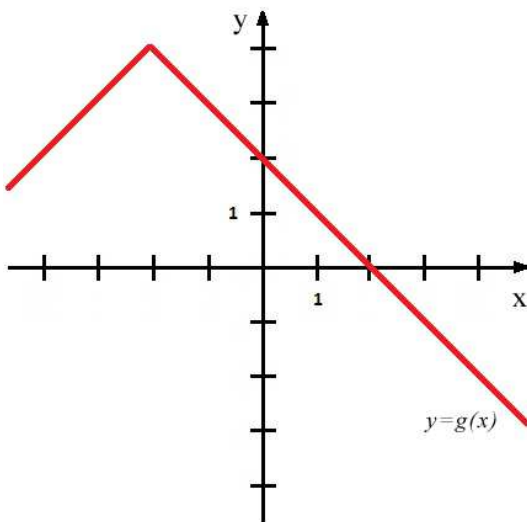
e)



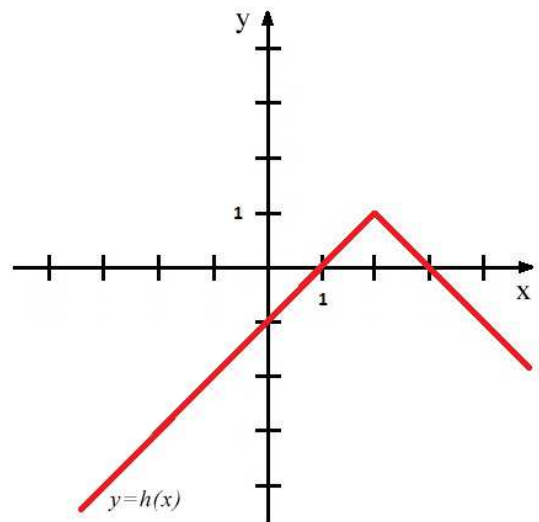
f)



g)



h)



3. Oldd meg grafikusan! Ellenőrizd a megoldást!

a) $2 \cdot |x - 6| = 6$

b) $|x + 1| = -\frac{1}{3}x + 1$

c) $1 - |x + 1| = x + 2$

d) $0,5 \cdot |x - 4| = \frac{1}{2}x$

e) $2 - |x| = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

f) $3 - 2 \cdot |x + 1| = \frac{2}{3}x + 1$

g) $|x + 3| = |x - 1|$

h) $|x| = 3 - |x - 1|$

7.3. A másodfokú függvény

1. Ábrázoljuk a következő valós számokon értelmezett függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben!

a) $x \mapsto x^2$

b) $x \mapsto x^2 + 2$

c) $x \mapsto (x + 2)^2$

d) $x \mapsto (x - 3)^2$

e) $x \mapsto -x^2 + 4$

f) $x \mapsto -(x - 2)^2$

g) $x \mapsto -(x + 3)^2$

h) $x \mapsto (x - 1)^2 - 4$

i) $x \mapsto -(x + 2)^2 + 1$

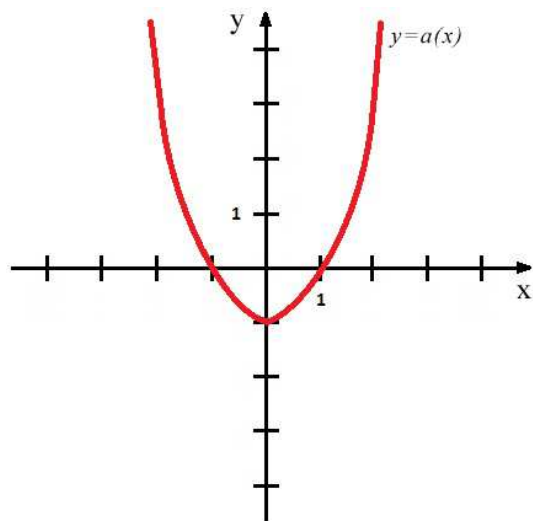
j) $x \mapsto 2 \cdot (x - 4)^2 - 2$

k) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2 + 1$

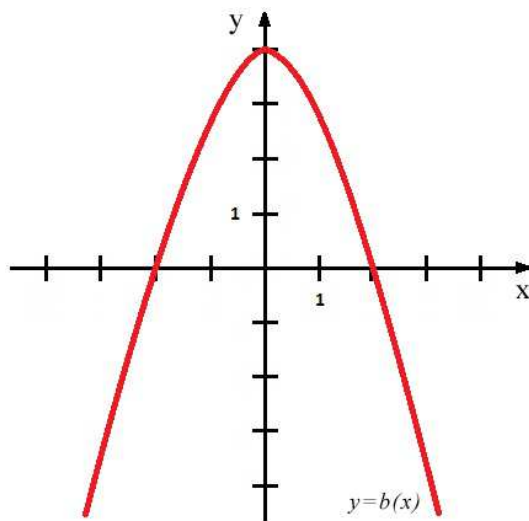
l) $x \mapsto -\frac{3}{4} \cdot (x - 2)^2 + 3$

2. Az ábrákon másodfokú függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát!

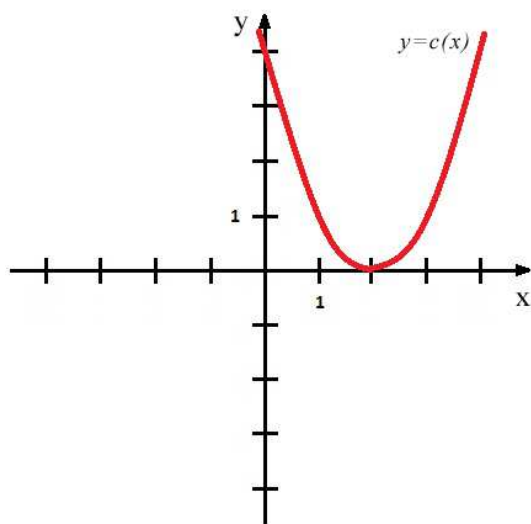
a)



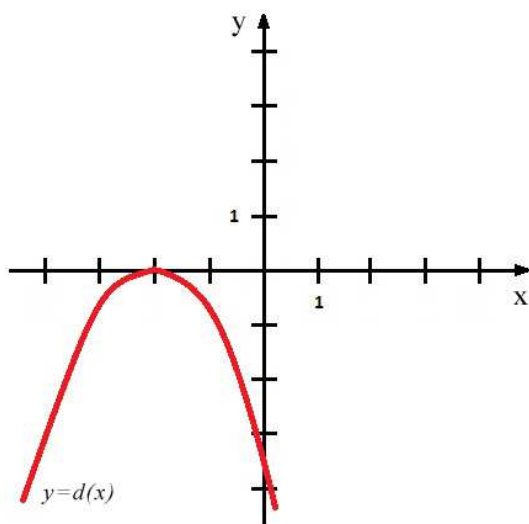
b)



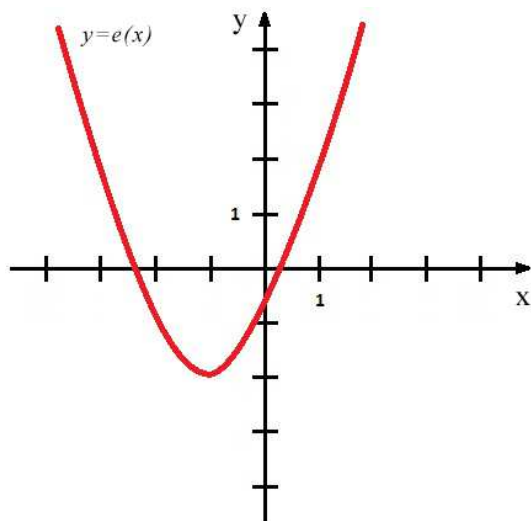
c)



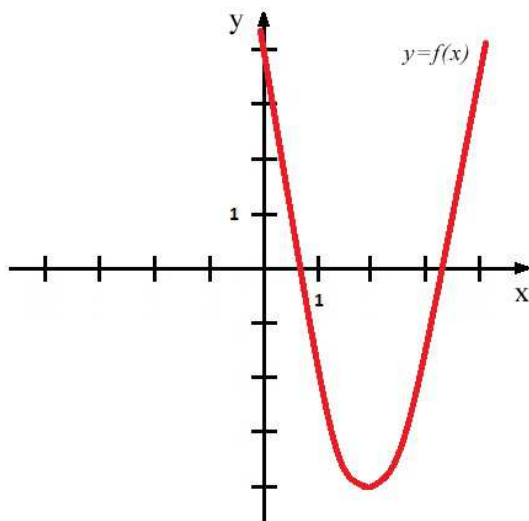
d)



e)



f)



8.1. A négyzetgyökvonás azonosságai

A négyzetgyökvonás azonosságai

$$\text{I. } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{ha, } a \geq 0; b \geq 0$$

$$\text{II. } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{ha, } a \geq 0; b > 0$$

$$\text{III. } (\sqrt{a})^k = \sqrt{a^k} \quad \text{ahol, } a > 0 \text{ és } k \in \mathbb{Z}$$

8.2. Feladatok:

1. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\text{a) } \sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{f) } \sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3}$$

$$\text{g) } \sqrt{2^5} \cdot \sqrt{2^3}$$

$$\text{h) } \frac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{7^5}}$$

$$\text{i) } (\sqrt{11})^3 \cdot \sqrt{11}$$

$$\text{j) } \frac{(\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3})^3}$$

$$\text{k) } \sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{2})$$

$$\text{l) } \sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} + \sqrt{3})$$

2. Négyzetgyök alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket!

$$\text{a) } 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$\text{b) } 5 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\text{c) } 0,1 \cdot \sqrt{10}$$

$$\text{d) } x \cdot \sqrt{x}$$

$$\text{e) } y^2 \cdot \sqrt{y}$$

$$\text{f) } 2a^2 \cdot \sqrt{3ab}$$

$$\text{g) } b \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\text{h) } \frac{b^2}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b}}$$

8.3. Az n -edik gyökvonás azonosságai

Az n -edik gyökvonás azonosságai

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{ha, } a \geq 0$$

$$\text{I. } \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{ha, } a, b \geq 0; n \in \mathbb{N}; n \geq 2$$

$$\text{II. } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{ha, } a \geq 0; b > 0; n \in \mathbb{N}; n \geq 2$$

$$\text{III. } \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k = a^{\frac{k}{n}} \quad \text{ahol, } a > 0; k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}; n \geq 2$$

$$\text{IV. } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \quad \text{ahol, } a \geq 0; m, n \in \mathbb{N}; n, m \geq 2$$

$$\text{V. } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} \quad \text{ahol, } a \geq 0; n, k \in \mathbb{N}; n, k \geq 2; m \in \mathbb{Z}$$

8.4. Feladatok:

1. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\text{a) } \sqrt[3]{x^3}$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{a^6}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{(-x)^3}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{(-x)^4}$$

$$\text{e) } \sqrt[3]{x^6}$$

$$\text{f) } \sqrt[3]{x^{21}}$$

$$\text{g) } \sqrt[5]{x^{15}}$$

$$\text{h) } \sqrt[6]{x^{24}}$$

$$\text{i) } \sqrt[8]{a^{16}}$$

$$\text{j) } \sqrt[4]{x^{20}}$$

$$\text{k) } \sqrt[3]{-64x^{15}}$$

$$\text{l) } \sqrt[9]{(3x)^{27}}$$

$$\text{m) } \sqrt[4]{\sqrt[25]{x^{100}}}$$

$$\text{n) } \sqrt[9]{\sqrt[3]{x^{10} \cdot x^{17}}}$$

2. Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő műveleteket!

$$\text{a) } \sqrt[3]{45 \cdot 75}$$

$$\text{b) } \sqrt[5]{972} \cdot \sqrt[5]{8}$$

$$\text{c) } \sqrt[4]{8 \cdot 36} \cdot \sqrt[4]{36 \cdot 2}$$

$$\text{d) } \sqrt[6]{5^4 \cdot 3^3} \cdot \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3}$$

$$e) \sqrt[3]{\frac{ab}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{24b^2}{a}}$$

$$f) \sqrt[5]{\frac{x^2y}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3y^4}{16}}$$

$$g) \sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{2}$$

$$h) \sqrt[3]{\frac{8}{3}} : \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$$

3. *Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb!*

$$a) 2 \cdot \sqrt[3]{23} \text{ vagy } 3 \cdot \sqrt[3]{7}$$

$$b) 3 \cdot \sqrt[3]{5} \text{ vagy } 2 \cdot \sqrt[3]{17}$$

$$c) 3 \cdot \sqrt[3]{51} \text{ vagy } 5 \cdot \sqrt[3]{11}$$

$$d) 3 \cdot \sqrt[4]{5} \text{ vagy } 2 \cdot \sqrt[4]{25}$$

$$e) 4 \cdot \sqrt[4]{4} \text{ vagy } 3 \cdot \sqrt[4]{13}$$

$$f) 3 \cdot \sqrt[5]{13} \text{ vagy } 2 \cdot \sqrt[5]{99}$$

4. *Számológép használata nélkül számítsd ki az alábbi kifejezések pontos értékét!*

$$a) (\sqrt{76} - \sqrt{19}) \cdot (\sqrt{76} + \sqrt{19})$$

$$b) (\sqrt{162} - \sqrt{2})^2$$

$$c) (\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{5}) \cdot (\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{25})$$

$$d) (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{36})$$

$$e) (\sqrt[4]{23} - \sqrt[4]{10}) \cdot (\sqrt{23} + \sqrt{10}) \cdot (\sqrt[4]{23} + \sqrt[4]{10})$$

$$f) \sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108}$$

$$g) \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{128}$$

$$h) \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{1280} - \sqrt[4]{405}$$

5. *Gyöktelenítsd az alábbi törtek nevezőjét!*

$$a) \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$b) \frac{12}{\sqrt{32}}$$

$$c) \frac{5}{\sqrt[3]{5}}$$

$$d) \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

$$e) \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}$$

$$f) \frac{2}{3 \cdot \sqrt[5]{16}}$$

$$g) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$h) \frac{2}{\sqrt{11} - \sqrt{9}}$$

$$i) \frac{2}{3 - \sqrt{2}}$$

$$j) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}$$

6. A gyökvonás azonosságainak felhasználásával hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{b}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^{-2}} \cdot \sqrt[4]{a^{-5}}}{\sqrt[4]{a^{-7}} \cdot \sqrt[4]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[5]{a^{-1}} \cdot \sqrt[5]{a^{-2}}}{\sqrt[5]{a^{-3}} \cdot \sqrt[5]{a^2}}$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt[4]{a^{-2} \cdot b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^{-1}}}{\sqrt{a^{-1} \cdot b} \cdot \sqrt[6]{a^{-2} \cdot b^5}}$$

$$\text{f) } \frac{\sqrt[3]{a^{-1} \cdot b^{-2}} \cdot \sqrt{a^3 \cdot b^{-1}} \cdot \sqrt[6]{a^{-5}}}{\sqrt{a^{-1} \cdot b^{-3}} \cdot \sqrt[3]{a^{-3} \cdot b} \cdot \sqrt[6]{b}}$$

$$\text{g) } \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[5]{a^{-4}} \cdot \sqrt{a^5}}{\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^{-2}} \cdot \sqrt{a}}$$

$$\text{h) } \frac{\sqrt[8]{a^{-5} \cdot b^3} \cdot \sqrt[3]{a^{-1} \cdot b^{-2}} \cdot \sqrt{a^{-1} \cdot b^{-1}}}{\sqrt[6]{a^{-1} \cdot b^{-5}} \cdot \sqrt{a^3 \cdot b^{-3}} \cdot \sqrt[4]{a^{-1} \cdot b^3}}$$

7. A gyökvonás azonosságainak felhasználásával számítsuk ki a következő kifejezések értékeit!

$$\text{a) } \frac{\sqrt[4]{15^5} \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[4]{40^2}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[4]{20^3}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{18^2} \cdot \sqrt[3]{225^2}}$$

9.1. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ahol az a , b , c adott valós számok és $a \neq 0$.

Az másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

9.2. Feladatok:

1. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket:

a) $x^2 - 2x + 4$

b) $x^2 - 6x + 10$

c) $x^2 + 4x + 1$

d) $x^2 - 12x + 11$

e) $x^2 + 16x + 4$

e) $x^2 - 20x + 7$

f) $x^2 - 3x + 2$

g) $x^2 + 5x + 1$

h) $2x^2 - 8x + 13$

i) $3x^2 - 12x + 7$

j) $-x^2 - 10x + 2$

k) $-x^2 + 8x + 3$

2. Oldjuk meg teljes négyzetté alakítással a következő egyenleteket:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 + 4x - 12 = 0$

c) $x^2 + 8x + 12 = 0$

d) $x^2 + 12x + 27 = 0$

e) $x^2 - 14x + 50 = 0$

f) $x^2 + 12x + 20 = 2x + 11$

g) $x^2 + 19x - 1 = 11x + 8$

h) $3x^2 - 5x + 53 = 2x^2 + 9x + 5$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

b) $3 \cdot (2x - 3) \cdot (5 - x) = 0$

c) $3 \cdot (3x - 2) \cdot (6 - 2x) = 0$

d) $7x \cdot (5x - 2) = 0$

e) $x^2 = 400$

f) $x^2 = 144$

g) $x^2 - 169 = 0$

h) $x^2 + 100 = 0$

i) $2x^2 - 200 = 0$

j) $2x^2 - 98 = 0$

k) $3x^2 - 48 = 0$

l) $-x^2 + 121 = 0$

m) $x^2 - 5x = 0$

n) $x^2 + 7x = 0$

o) $x^2 + 3x = 0$

p) $3x^2 - 4x = 0$

q) $4x^2 = 15x$

r) $14x^2 = 7x$

s) $7x^2 = -9x$

t) $3x^2 = 17x$

4. *Hány megoldása van az alábbi másodfokú egyenleteknek a valós számok halmazán?*

a) $x^2 + x - 4 = 0$

b) $x^2 + 2x + 2 = 0$

c) $2x^2 + 24x + 72 = 0$

d) $7x^2 - 2x + 1 = 0$

e) $-3x^2 + 6x - 3 = 0$

f) $\frac{1}{8}x^2 + 2x + 2 = 0$

5. *Oldjuk meg a megoldóképlet felhasználásával a következő egyenleteket:*

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $x^2 + 4x - 5 = 0$

c) $x^2 - 8x + 15 = 0$

d) $x^2 - 4x - 21 = 0$

e) $2x^2 - 5x - 12 = 0$

f) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

g) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

h) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

i) $3x^2 + 11x + 6 = 0$

j) $4x^2 + 15x - 4 = 0$

k) $12x^2 - 41x + 35 = 0$

l) $13x^2 + 11x + 4 = 0$

m) $15x^2 + x - 6 = 0$

n) $20x^2 - 31x - 7 = 0$

o) $63x^2 + 2x - 1 = 0$

p) $-x^2 + 14x - 49 = 0$

q) $-6x^2 + 5x + 4 = 0$

r) $-12x^2 + x + 35 = 0$

6. Oldd meg a megoldóképlet segítségével az alábbi másodfokú egyenleteket a valós számok halmazán!

Ha az egyenletnek van megoldása, akkor behelyettesítéssel ellenőrizd a gyök(ök) helyességét!

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$

b) $x^2 - 5x - 50 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

d) $2x^2 - 6x - 8 = 0$

e) $3x^2 - 10x + 7 = 0$

f) $3x^2 - 10x + 6 = 0$

7. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(x + 2) \cdot (2x - 3) + x - 4 = -6$

b) $(x + 1) \cdot (x - 2) - 3 \cdot (x + 5) = 3 - 5x$

c) $(3x + 1) \cdot (2x - 3) - 2 \cdot (x + 1) = 7x + 1$

d) $(2x + 1) \cdot (x - 4) - (x + 2) \cdot (3x - 4) = -6x$

e) $(5x + 7) \cdot (x - 1) + (5x + 3) \cdot (x + 4) = 26x + 8$

f) $(2x - 3) \cdot (x + 8) - (5x - 3) \cdot (2x + 7) = -36x + 99$

g) $2 \cdot (x - 3) \cdot (3x + 2) - 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) + 8x = 0$

h) $(2x - 7) \cdot (x + 3) + (7x - 1) \cdot (2x + 5) = 46x - 29$

i) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3x+1}{8} = 2$

j) $\frac{3x-2}{5} - \frac{4-3x}{x} = x$

k) $\frac{3x+2}{x} - \frac{x+2}{2x} = x+1$

l) $\frac{2x+3}{x} + \frac{x-5}{x-1} = 2$

m) $\frac{3x-1}{x+3} + \frac{3-2x}{x-3} = 2$

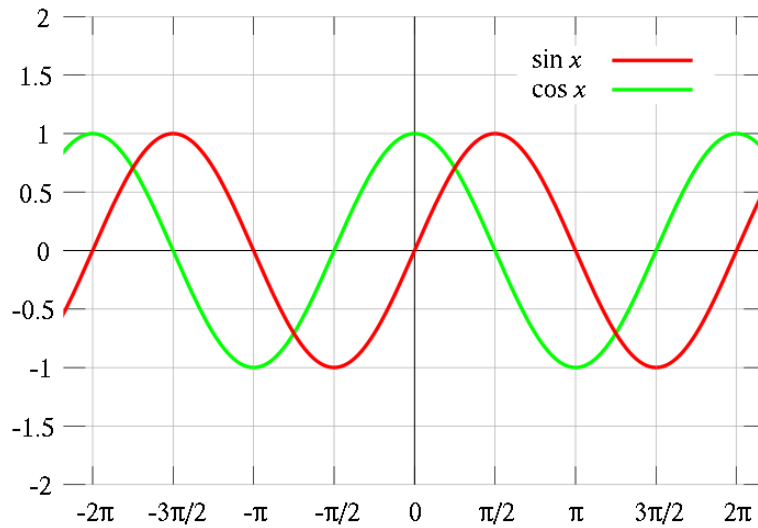
n) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+2} = 3$

o) $\frac{3x+5}{x-3} - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{11x-13}{x^2-9}$

p) $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} + \frac{x+5}{x^2-1} = 3$

10.1. Szögfüggvények

A szinusz ($f(x) = \sin x$) és koszinusz ($g(x) = \cos x$) függvények:

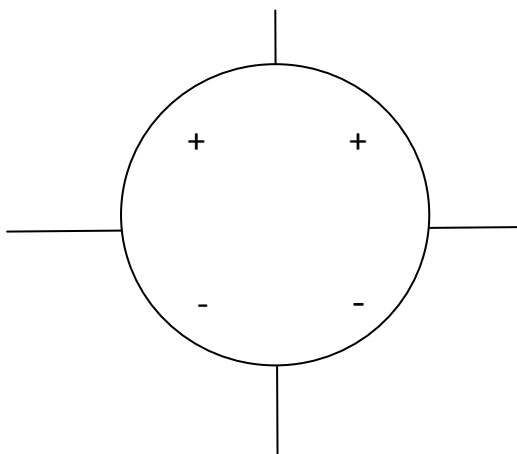


Nevezetes szögek szögfüggvényei:

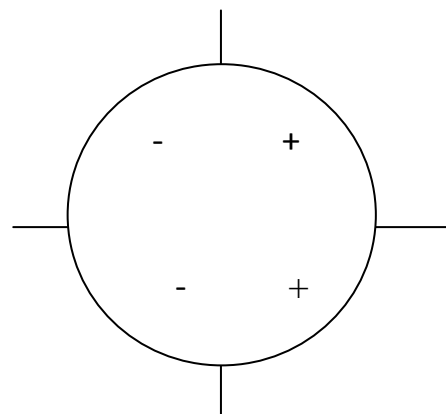
	sin	cos	tan	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Előjel tábla:

Szinusz:



Koszinusz:



Szögfüggvények definíciói: (Derékszögű háromszög hiányzó szögének kiszámításához)

$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

10.2. Feladatok:

1. Határozd meg az alábbi szögek szögfüggvényeinek értékét!

a) $\sin 83^\circ$

b) $\sin 79^\circ$

c) $\sin 49,6^\circ$

d) $\cos 79,24^\circ$

e) $\cos 19,8^\circ$

f) $\cos 52^\circ 26'$

g) $\text{tg} 57^\circ 63'$

h) $\text{tg} 46^\circ 29'$

i) $\text{tg} 49^\circ 52'$

j) $\text{ctg} 49^\circ$

k) $\text{ctg} 73^\circ$

l) $\text{ctg} 67^\circ 18'$

2. Határozd meg a szögek nagyságát, melyek szögfüggvényeinek értéke:

a) $\sin \alpha = 0,6972$

b) $\sin \beta = 0,6209$

c) $\sin \gamma = 0,6658$

d) $\cos \alpha = 0,3627$

e) $\cos \beta = 0,4589$

f) $\cos \gamma = 0,8872$

g) $\text{tg} \alpha = 1,3327$

h) $\text{tg} \beta = 0,3315$

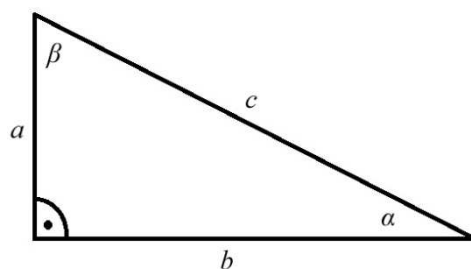
i) $\text{tg} \gamma = 1,5543$

j) $\text{ctg} \alpha = 0,3221$

k) $\text{ctg} \beta = 1,1987$

l) $\text{ctg} \gamma = -1,7071$

3. Számítsuk ki a derékszögű háromszöghiányzó adatait!



a) $b = 20 \text{ mm}; c = 35 \text{ mm}$

b) $b = 14 \text{ dm}; c = 20 \text{ dm}$

c) $a = 5 \text{ cm}; b = 10 \text{ cm}$

d) $a = 25 \text{ cm}; c = 42 \text{ cm}$

e) $b = 34 \text{ cm}; c = 55 \text{ cm}$

f) $a = 2 \text{ mm}; c = 6 \text{ mm}$

4. *Határozd meg az alábbi szögek szögfüggvényeinek előjelét!*

a) $\sin 370^\circ$

b) $\cos 520^\circ$

c) $\sin 233^\circ$

d) $\cos 358^\circ$

e) $\sin 410^\circ$

f) $\cos 480^\circ$

g) $\sin 199^\circ$

h) $\cos 300^\circ$

i) $\sin 340^\circ \cdot \sin 56^\circ$

j) $\cos 29^\circ \cdot \cos 250^\circ$

k) $\sin 115^\circ \cdot \cos 320^\circ$

l) $\cos 130^\circ \cdot \sin 310^\circ$

m) $\sin 137^\circ \cdot \cos 310^\circ$

n) $\cos 110^\circ \cdot \sin 300^\circ$

o) $\sin 210^\circ \cdot \sin 2^\circ$

p) $\cos 9^\circ \cdot \cos 269^\circ$

q) $\cos 100^\circ \cdot \cos 4^\circ$

r) $\sin 19^\circ \cdot \sin 129^\circ$

s) $\sin 52^\circ \cdot \cos 138^\circ$

t) $\cos 150^\circ \cdot \sin 150^\circ$

u) $\cos 152^\circ \cdot \cos 138^\circ$

v) $\sin 150^\circ \cdot \sin 150^\circ$

5. *Alkalmazd a nevezetes szögek szögfüggvényeit a feladat megoldásához!*

a) $2\sin 45^\circ + 2\cos 60^\circ + 4\cos 45^\circ - \text{ctg} 45^\circ$

b) $\sin 30^\circ - 2\sin 60^\circ + 3\text{tg} 30^\circ + \cos 60^\circ - \text{ctg} 45^\circ$

c) $2\cos 30^\circ + 3\text{tg} 30^\circ + \text{tg} 60^\circ$

d) $3\text{ctg} 60^\circ - \text{ctg} 45^\circ + 2\sin 30^\circ - \text{ctg} 30^\circ$

e) $2\sin 60^\circ + 2\cos 60^\circ + \text{tg} 45^\circ - 3\text{ctg} 45^\circ$

f) $\cos 60^\circ + 3\text{ctg} 60^\circ - \text{tg} 45^\circ + \sin 30^\circ - \text{tg} 60^\circ$

g) $2\cos 30^\circ + 6\text{tg} 30^\circ + \text{tg} 60^\circ + 3\text{ctg} 60^\circ$

h) $3\text{ctg} 60^\circ - \text{ctg} 45^\circ + 2\sin 30^\circ - \text{ctg} 30^\circ$

6. Számítsd ki a következő kifejezések értékét! Jelöld az előjeleket is!

a) $\cos \frac{7\pi}{3}$

b) $\sin \frac{3\pi}{6}$

c) $\cos \frac{8\pi}{2}$

d) $\sin \frac{7\pi}{4}$

e) $\cos \frac{5\pi}{3}$

f) $\cos \frac{11\pi}{6}$

g) $\sin \frac{8\pi}{3}$

h) $\sin \frac{9\pi}{4}$

i) $\cos \frac{7\pi}{6}$

j) $\cos \frac{9\pi}{4}$

k) $\sin \frac{5\pi}{4}$

l) $\sin \frac{8\pi}{3}$

7. Ábrázold a következő függvényeket!

a) $x \mapsto \sin x - 1$

b) $x \mapsto \cos x + 1$

c) $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$